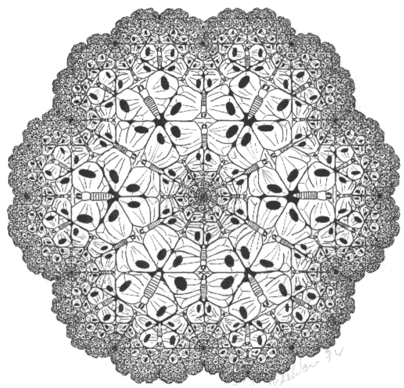


Introducción a la Teoría de Valuaciones

PROGRAMA PARES ORDENADOS 2024 - I

Mentor: Luis Manuel Reyes de la Luz[1], **Aprendiz:** Néstor Heli Aponte Ávila[2]
[1] Universidad Nacional Autónoma de México
luismaredeluz@ciencias.unam.mx
[2] Universidad Distrital Francisco José de Caldas
nhapontea@udistrital.edu.co

Abstract

La Teoría de Valuaciones es una rama de las matemáticas que estudia las formas de medir complejidad en los elementos de un objeto algebraico, bien sean grupos, anillos o cuerpos. Esta medición permite de alguna manera clasificar y comparar estos objetos, propiciando la existencia de sus aplicaciones en diversas áreas.

Podemos entender las valuaciones como una alternativa al concepto de valor absoluto abordado desde su perspectiva no arquimediana, condición que nos ofrece una conexión sólida entre propiedades algebraicas y analíticas. A lo largo de la historia reciente, el estudio de las valuaciones ha resultado en fenómenos enriquecedores a los ya conocidos y ampliamente estudiados del análisis real. Caso del campo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma p-ádica diferente de la que todos conocemos.

Contents

Contexto Histórico

Las valuaciones en álgebra surgieron a finales del siglo XIX como una respuesta a la necesidad de entender y extender los números racionales de una manera más general y profunda. Kurt Hensel introdujo los números p-ádicos, una extensión de los números racionales que facilitaba el trabajo con propiedades modulares y la resolución de ecuaciones diofánticas. Este enfoque abrió la puerta a la formalización de las valuaciones por matemáticos como Emil Artin y Emmy Noether en el siglo XX. Las valuaciones permitieron medir "tamaños" o "valores" dentro de cuerpos y anillos, proporcionando una estructura adicional que enriquecía el estudio de estos sistemas algebraicos.

El estudio de las valuaciones ha sido fundamental para avanzar en diversas áreas de las matemáticas, incluyendo la teoría de números, la geometría algebraica y la teoría de modelos. Las valuaciones ayudan a clasificar cuerpos, analizar singularidades en variedades algebraicas y profundizar en la estructura interna de anillos y módulos. Además, su aplicación se extiende a campos como la criptografía y la teoría de la información, donde una comprensión detallada de la estructura algebraica es crucial. En esencia, las valuaciones proporcionan una herramienta poderosa y versátil para explorar y resolver problemas complejos en álgebra y más allá.

1 Generalidades de las Valuaciones

1.1 Topología y Grupos Topológicos

En la presente sección introduciremos algunos preliminares esenciales para un primer abordaje a los conceptos base de la Teoría de Valuaciones, concretamente daremos herramientas y formalismo a la topología con la que vienen equipados nuestros objetos de estudio.

Definición 1.1 (Topología por vecindades)**.** Sea S un conjunto. Un sistema de vecindades es una familia indexada $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in S}$ de subconjuntos $\mathcal{N}_x \subseteq \wp(S)$ no vacíos, los cuales verifican:

i. $\forall x \in S,\ \forall U \in \mathcal{N}_x : x \in U$

ii. $\forall x \in S,\ \forall U \in \mathcal{N}_x,\ y \in U : \exists V \in \mathcal{N}_y : V \subseteq U$

iii. $\forall x \in S,\ \forall U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x : \exists U \in \mathcal{N}_x : U \subseteq U_1 \cap U_2$

Proposición 1.1. *Sea* $\Im := \left\{ \bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \bigcup_{x\in S} \mathcal{N}_x \right\}$

(a) $(S, \Im)$ *es un espacio topológico.*

(b) $\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{x \in S} \mathcal{N}_x \right\}$ *es una base para* $(S, \Im)$.

(c) $U \subseteq S$ *es abierto en* $(S, \Im)$ *sii para cada* $x \in U$ *existe* $U_x \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in U_x \subseteq U$.

Demostración. El ítem (a) es consecuencia de (b) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in U_1 \cap U_2$. Por (iii) existe $\mathcal{N}_x \ni U \subseteq U_1 \cap U_2$, así por definición de la base $U \in \mathcal{B}$. Ahora bien, $x \in \mathcal{N}_x \neq \emptyset$ para cada $x \in S$ por lo que $\mathcal{B}$ es también un cubrimiento de S. (c) ($\Rightarrow$) Sea $x \in U$ abierto, puesto que $\mathcal{B}$ es base $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, de allí que $x \in B_x$ para algún $x \in I$, lo cual a su vez implica que existe $\mathcal{N}_x \ni U_x \subseteq B_x \subseteq U$ tal que $x \in U_x$. (c) ($\Leftarrow$) $\bigcup U_x = U$, esto es, U es unión de básicos y por tanto, abierto en la topología.

□

Definición 1.2 (Grupo Topológico)**.** La tripla $(G, \Im, \cdot)$ es un grupo topológico si verifica:

i. $(G, \Im)$ es un espacio topológico.

ii. $(G, \cdot)$ es un grupo.

iii. La aplicación $\eta : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y^{-1} \end{cases}$ es continua.

Proposición 1.2. *Si* G *es un grupo topológico y* $\mathscr{J}$ *es el sistema de vecindades de* e *entonces para cada* $x \in G$, $x\mathscr{J}$ *es el sistema de vecindades de* x.

Demostración. (i) Sea $U_e \in \mathscr{J}$, entonces $e \in U_e$, de allí que $x \in U_x$ para cada $U_x \in x\mathscr{J}$. - (ii) Sea $\bar{y} \in U_x$, elemento de la forma $x \cdot y$ con $y \in U_e$, sabemos existe $V_y \subseteq U_e$, por lo que existe también $xV_y = V_{\bar{y}} \subseteq U_x$. (iii) Por último, sean $U_{x_1}, U_{x_2} \in x\mathscr{J}$, vecindades de la forma xU_{e_1}, xU_{e_2} respectivamente, sabemos existe $U_e \subseteq U_{e_1} \cap U_{e_2}$, la cual argumenta la existencia de $xU_e = U_x \subseteq U_{x_1} \cap U_{x_2}$.

□

Esta última proposición ya nos da una herramienta poderosa, pues nos dice que podemos entender toda nuestra topología estudiando únicamente los abiertos del elemento identidad.

1.2 Filtraciones y Topología I-ádica

Definición 1.3. Sea G un grupo topológico, una filtración de G es una familia $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que:

i. Λ es un conjunto dirigido.

ii. $G_\lambda \leq G$ para cada $\lambda \in \Lambda$

iii. Si $\lambda \leq \widehat{\lambda}$ entonces $G_{\widehat{\lambda}} \subseteq G_\lambda$

Ejercicio 1.1. *Toda filtración $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un sistema de vecindades de e.*

Solución. (i) Es claro por la definición 1.3 que $e \in G_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. (ii) Si $y \in G_\lambda$ entonces para λ existe $\widehat{\lambda} \geq \lambda$ tal que $y \in G_{\widehat{\lambda}} \subseteq G_\lambda$. (iii) Sean $G_{\lambda_1},\ G_{\lambda_2} \in \{G_\lambda\}$, para $\lambda_1,\ \lambda_2$ existe λ tal que $\lambda_1 \leq \lambda$ y $\lambda_2 \leq \lambda$ y con ello $G_\lambda \subseteq G_{\lambda_1} \cap G_{\lambda_2}$

En particular, si G es un grupo abeliano entonces $G_\lambda \trianglelefteq G$ por lo que los cocientes están bien definidos. Para cada $\lambda \in \Lambda$ considere la proyección en el grupo cociente $\pi_\lambda : G \ni x \longmapsto x + G_\lambda$. Observese que para $x,\ y \in G,\ \lambda \leq \widehat{\lambda}$, si $x - y \in G_{\widehat{\lambda}}$ entonces $x + G_{\widehat{\lambda}} = y + G_{\widehat{\lambda}}$ y también $x + G_\lambda = y + G_\lambda$, luego la aplicación

$$\mu_\lambda^{\widehat{\lambda}} : \begin{cases} G/G_{\widehat{\lambda}} & \longrightarrow\ G/G_\lambda \\ x + G_{\widehat{\lambda}} & \longmapsto\ x + G_\lambda \end{cases}$$

está bien definida, y el diagrama ilustrado en la Figura 1 conmuta. Toda esta construcción es bien recogida por el funtor $F : (\Lambda, \leq) \longrightarrow \mathbf{Ab}$, el cual envía cada $\lambda \longmapsto G/G_\lambda$ y cada $\lambda \leq \widehat{\lambda} \longmapsto \mu_\lambda^{\widehat{\lambda}}$. Esta propiedad es sumamente importante, veremos más adelante como los cocientes adquieren protagonismo.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\pi_\lambda"'] \arrow[dr, "\pi_{\widehat{\lambda}}"] & \\
G/G_\lambda \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & G/G_{\widehat{\lambda}} \arrow[l, "\mu_\lambda^{\widehat{\lambda}}"]
\end{tikzcd}$$

Figure 1: Inmersión de cocientes

Nuestro siguiente paso será interpretar la topología de G en términos de la filtración $\{G_\lambda\}$, es otras palabras, entender la topología desde una perspectiva algebraica.

Ejercicio 1.2. *Sea $e \in U \subseteq G$. El conjunto U es abierto básico sii para cada $x \in U$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in G_\lambda \subseteq U$.*

Solución. $(\Rightarrow)$ U abierto básico implica U de la forma $U = \bigcup G_\lambda$, luego, si $x \in U$ entonces $x \in G_\lambda \subseteq U$ para algún $\lambda \in \Lambda$. $(\Leftarrow)$ Bajo esta premisa $U = \bigcup G_\lambda$, abierto por definición.

Ejemplo 1. Considere la filtración $\{3^n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $G = \mathbb{Z}$.

$$3^n\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq 3^2\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$

¿Cuándo $k\mathbb{Z}$ es abierto en la filtración? Debe existir λ tal que $3^\lambda\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$, esto pasa sii $k|3^\lambda$, es decir, $k\mathbb{Z}$ es abierto sii $k = 3^\lambda$ para algún λ. Esto para el caso de la identidad, en su forma más general

$$U^{\text{ab}} \subseteq \Im \Leftrightarrow U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} n + 3^\lambda\mathbb{Z}$$

Aunque dimos la definición de filtración para grupos topológicos, funciona perfectamente en otros objetos algebraicos como anillos, cuerpos, espacios vectoriales o módulos, por mencionar algunos.

Ejemplo 2. Sean R un anillo e $I \subset R$ ideal propio. Se define la filtración I-ádica como $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$I^n \subseteq \cdots \subseteq I^2 \subseteq I \subseteq R$$

su topología subyacente es llamada también topológia I-ádica.

Teorema 1.1. *Sea $f : (G, \{G_\lambda\}) \longrightarrow (H, \{H_\lambda\})_{\lambda\in\Lambda}$ un homomorfismo de grupos. Si $f(G_\lambda) \subseteq H_\lambda$ entonces f es continuo.*

Demostración. Basta ver la continuidad en el neutro. Sea $V \subseteq H$ abierto de $f(e)$, existe para él $\lambda \in \Lambda$ tal que $H_\lambda \subseteq V$, luego $G_\lambda \subseteq f^{-1}(V) = U \ni e$, así pues U verifica el ser abierto.

□

En lenguaje algebraico este último Teorema se traduce en que f es continua si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\widehat{\lambda} \in \Lambda$ tal que $f(G_{\widehat{\lambda}}) \subseteq H_\lambda$. Además si f es continua existe un morfismo único $\widehat{f} : G/G_{\widehat{\lambda}} \longrightarrow H/H_\lambda$ el cual mapea $x + G_{\widehat{\lambda}} \longmapsto f(x) + H_\lambda$ de forma que el diagrama en la Figura 2 conmuta.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[d] \\
G/G_{\widehat{\lambda}} \arrow[r, "\widehat{f}"'] & H/H_\lambda
\end{tikzcd}$$

Figure 2: Homomorfismos y continuidad

1.3 Valuación y Seminorma

Aunque en este momento nos sea más ilustrativo tomar anillos, la Teoría en sí, planteada de aquí en adelante, funciona perfectamente en otras estructuras como las mencionadas en la sección previa.

Definición 1.4. Sea R un anillo con filtración $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y G un grupo abeliano totalmente ordenado. Una valuación de R es una función $v : R \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ tal que

i. $v(a) = \infty$ si y solo si $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$

ii. $v(ab) = v(a) + v(b)$

iii. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

Ejemplo 3. Sea R un anillo con filtración I-ádica $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La función $v_I(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : x \in I^n\}$ es una valuación, conocida como *valuación I-ádica*, siempre que I sea un ideal primo.

Definición 1.5 (Seminorma No Arquimediana)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una seminorma sobre K es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ que verifica

i. $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in V$.

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todos $\alpha \in K$ y $x \in V$.

iii. $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Ejercicio 1.3 (Seminorma I-ádica)**.** *Sea $\epsilon \in (0, 1)$ fijo. La aplicación $\|x\| := \epsilon^{v_I(x)}$ es una seminorma no arquimediana sobre R.*

Solución. (i) $\epsilon > 0$ implica $\|x\| \geq 0$. (ii) $\|yx\| = \epsilon^{v_I(yx)} = \epsilon^{v_I(y)}\epsilon^{v_I(x)} = \|y\|\|x\|$. (iii) $v_I(a + b) \geq \min\{v_I(a), v_I(b)\}$ luego $\|a + b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$.

Este último ejercicio es un ejemplo concreto, sin embargo, hemos de señalar que en general toda valuación induce una seminorma no arquimediana.

Proposición 1.3.

$$\ker\|\cdot\| := \{a \in R : \|a\| = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $x \in \ker\|\cdot\|$ entonces $\|x\| = 0 = \epsilon^{v_I(x)}$, esto implica que $v_I(x) = \infty$, es decir, $x \in I^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ($\Leftarrow$) Si $x \in \bigcap I^n$ entonces $v_I(x) = \infty$ con ello $x \in \ker\|\cdot\|_I$.

$\square$

Ejemplo 4. Sean $R = K[x]$, $I = \langle x \rangle$ y su filtración I-ádica $\{I^n = \langle x^n \rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces $v_I(f) = \deg(f) = n$ y $\|f\| = \epsilon^n$. Sea $g \in \ker \|\cdot\|$ entonces necesariamente $f \in \bigcap I^n$, es decir $x^n | g$ para cada $n \in \mathbb{N}$ lo cual pasa sii $g = 0$. Por lo tanto $\ker \|\cdot\| = \{0\}$. En este caso $\|\cdot\|$ más que seminorma es norma.

Teorema 1.2. *Sea R un anillo con filtración $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $I \subset R$ ideal primo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\bigcap I^n = 0$.
2. *La topología I-ádica $\Im_{\|\cdot\|}$ es Hausdorff.*
3. $\|\cdot\|$ *es una norma.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean x e y dos elementos distintos en el anillo R. Mostrar que son separables mediante abiertos es equivalente bajo translación a mostrar que 0 e $x - y$ son separables. Sabemos que $x - y = r \neq 0$, esto implica $\|r\| \neq 0$ por lo que existe $n_0 < +\infty$ tal que $v_I(r) = n_0$. Consideremos los abiertos

$$U = I^{n_0+1} \;\text{ y }\; V = r + I^{n_0+1}$$

Es claro que $0 \in U$ y $r \in V$. Supongamos ahora que existe $q \in U \cap V$, entonces $q = r + s$ para $s \in I^{n_0+1}$, luego $r = q - s \in I^{n_0+1}$ lo cual supone una contradicción pues $v_I(r) = n_0$. Por lo tanto $U \cap V = \emptyset$ y la topología $\Im_{\|\cdot\|}$ es Hausdorff.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos existe $x \neq 0 \in R$ tal que $\|x\| = 0$. Sabemos por la proposición 1.3 que $x \in \bigcap I^n$, y por hipótesis que existen abiertos $U,\ V$ tales que $0 \in U$ y $x \in V$ con $U \cap V = \emptyset$ de la forma:

$$U = I^{n_0} \;\text{ y }\; V = x + I^{n_1}$$

sin embargo $x \in \bigcap I^n \subset I^{n_0}$ por lo que $x \in U \cap V$ hecho que supone una contradicción. Por lo tanto $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\|x\| = 0$ sii $x = 0$ implica $\ker \|\cdot\| = \bigcap I^n = 0$.

□

El tener una topología separable nos va a ser útil más adelante, pues esta propiedad nos va a permitir tener una noción de unicidad a la hora de plantear límites.

Ejemplo 5. Sea p primo e $I = \langle p \rangle \subset \mathbb{Z}$. La filtración $\{p^n\mathbb{Z}\}$ verifica $\bigcap I^n = 0$, escogiendo $\epsilon = 1/p$ tenemos

$$v_p(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : x \in p^n\mathbb{Z}\} \sim \max\{n \in \mathbb{N} : p^n | x\} \longleftarrow \;\textit{Valuación p-ádica}$$

$$\|x\|_p := \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(x)} \longleftarrow \textit{ Norma p-ádica}$$

En busca de agregar generalidad y no restarle potencial a nuestra construcción de la Teoría desde seminorma recordamos que para todo espacio seminormado $(X, \|\cdot\|)$ podemos construir uno normado haciendo $X/\ker\|\cdot\|$. Esta observación es mejor recogida en la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sea* $\mathcal{U}$: **Norm** $\hookrightarrow$ **SemiNorm** *el funtor olvido que lleva a un espacio normado en el seminormado inducido por la norma original. Existe* $\mathcal{V}$: **SemiNorm** $\rightarrow$ **Norm** *tal que* $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ *es adjunto (recupera la propiedad).*

No incluimos la demostración pues no compete a las presentes notas, más sin embargo, destacamos el potencial de esta técnica categórica a la hora de estudiar construcciones y propiedades universales, véase [5].

1.4 Convergencia y Completación

En la sección previa vimos el surgimiento de la norma desde el concepto de valuación. Está herramienta adicional nos sugiere un curso natural en la Teoría, agregar perspectiva analítica a nuestro dúo Álgebra-Topología. Es por ello que en esta sección nos ocuparemos de migrar conceptos de esta área, apuntando a la completación de espacios como gran objetivo.

Definición 1.6 (Convergencia)**.** Sea $\{x_n\}$ sucesión en un grupo G con filtración $\{G_\lambda\}$. La sucesión $\{x_n\} \longrightarrow x$ sii para cada G_λ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n \geq N} \subseteq x + G_\lambda$.

Definición 1.7 (Sucesión de Cauchy)**.** La sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy sii para cada G_λ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n - x_m\}_{n,m \geq N} \subseteq G_\lambda$

Proposición 1.5. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *es de Cauchy si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$

Demostración. $(\Rightarrow)$ $\{x_n\}$ Cauchy implica que para cada G_λ existe una cola de la sucesión tal que $\{x_n\} \subseteq G_\lambda$, luego $x_n - x_{n+1} = 0 \pmod{G_\lambda}$, así

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$$

$(\Leftarrow)$ Sea $G_\lambda \subseteq G$ por hipótesis $x_n - x_{n+1} \in G_\lambda$, para $m > n$ tenemos

$$x_n - x_m = \sum_{n=k}^{m-1} x_k - x_{k+1} \in G_\lambda$$

para luego para $n > N$ tenemos $\{x_n - x_m\} \subseteq G_\lambda$.

$\square$

Llegados a este punto preguntarnos por la completitud de $(G, \{G_\lambda\})$ es de lo más normal, más aún ante una respuesta negativa, el plantear su completación a un grupo con filtración que si lo sea. Con este objetivo en mente, plantearemos la completación como un limite funtorial, sin embargo, previo a ello hemos de estudiar la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Sea I una categoría indexada y $F : I \longrightarrow$ **Grp** un funtor. La dupla $(L, \{p_i\})$ es el límite de F, donde*

$$L := \left\{ \prod_{i \in I} F(i) : F(f : i \longrightarrow j) = g : G_i \longrightarrow G_j \right\} \quad y \quad p_i : L \longrightarrow G_i$$

Demostración. Propiedades (i) y (ii) de la definición 3.7 son satisfechas por la definición propia de L. (iii) Sea $(M, \{\varphi_i\})$ otro cono, existe un único morfismo $h' : M \to \prod F(i) \supset L$. Por lo tanto, existe también un único $h = h'|_L$ tal que $m \longmapsto (p_i(m))_{i \in I}$, esta imagen pertenece a L pues si $f : i \longrightarrow j$ entonces $F(f)(p_i(m))_{i \in I} = (p_j(m))_{j \in I}$. Es claro así que $p_i \circ h = \varphi_i$, y la unicidad es inmediata.

$\square$

Teorema 1.3. *Sea G grupo con filtración $\{G_\lambda\}$ y $\widehat{G} := \varprojlim G/G_\lambda$. El grupo $\widehat{G}$ tiene una filtración tal que el morfismo canónico es continuo y es completo.*

Demostración (Sketch). Sean π_λ y p_λ las proyecciones canónicas en G/G_λ de G y $\widehat{G}$ respectivamente. Por la propiedad universal del límite existe un único $\alpha : G \longrightarrow \widehat{G}$ tal que $\pi_\lambda = \alpha \circ p_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Sea $F^\lambda := \mathrm{Ker}\{p_\lambda\}$, la familia $\{F^\lambda\}$ es una filtración de $\widehat{G}$. Observemos en la Figura 3 que para cada $\lambda \in \Lambda$ ambas sucesiones son exactas, por lo que $\widehat{G}/F^\lambda \cong G/G_\lambda$, hecho que nos garantiza $\widehat{G}$ Hausdorff y α continua.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_\lambda \arrow[r, "i"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\beta"'] & G \arrow[dr, "\pi_\lambda"] \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowright"] & & \\
& & & G/G_\lambda \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^\lambda \arrow[r, "i"'] & \widehat{G} \arrow[ur, "p_\lambda"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figure 3: Morfismo canónico

Sea $\{\widehat{x}_n\} \subseteq \widehat{G}$ sucesión de Cauchy, esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{x}_n = (x_n^{(\lambda_1)}, x_n^{(\lambda_2)}, \ldots) \in \widehat{G} = \varprojlim G/G_\lambda$$

Cada $\{x_n^{(\lambda_i)}\}$ es Cauchy en G/G_{λ_i}. Por definición de sucesión Cauchy para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una cola tal que $\widehat{x}_n \in F^\lambda = \mathrm{Ker}\{p_\lambda\}$, observemos en la Figura 4 como los morfismos inclusión y p_λ llevan está cola a su respectiva en cada coordenada. El elemento $x := (x_{n_1}^{(\lambda_1)}, x_{n_2}^{(\lambda_2)}, \ldots) \in \widehat{G}$ es el límite de $\{x_n\}$.

□

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{x}_n^{(\lambda)} = 0 & \\
 & & & \pitchfork & \\
 & \widehat{x}_n & \widehat{x}_n & G/G_\lambda \arrow[r] & 0 \\
 & \pitchfork & \pitchfork & & \\
0 \arrow[r] & F^\lambda \arrow[r, "i"'] & \widehat{G} \arrow[ur, "p_\lambda"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Figure 4: Convergencia por coordenadas

La completación de $(G, \{G_\lambda\})$ surge precisa e intuitivamente como el espacio de todas las sucesiones Cauchy con sus términos como coordenadas, en estas tuplas infinitas.

Lema 1.1. *Sea $(N, \{N_\lambda\})$ completo y $f : G \to N$ morfismo continuo entonces existe un único $\widehat{f} : \widehat{G} \to N$ tal que $f = \alpha \circ \widehat{f}$.*

Demostración. Dado que f es continua $f(G_\lambda) \subseteq N_{\lambda'}$, por lo que podemos plantear la inclusión $f_\lambda : G/G_\lambda \to N/N'_\lambda$ y argumentar así por la propiedad universal del límite la existencia de $\widehat{f}$. La situación es ilustrada en la Figura 5.

□

Este último lema nos deja ver que $\widehat{G}$ es la completación más pequeña de $(G, \{G_\lambda\})$, cualquier otra aparece como un factor de ella. Este último lema motiva el siguiente corolario.

Corolario. *Sean* **Comp** *la categoría de grupos con filtración completos y* **Filt** *la de grupos con filtración y $\mathcal{U}$:* **Comp** $\hookrightarrow$ **Filt** *el funtor olvido. Entonces existe*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} : \mathbf{Filt} &\longrightarrow \mathbf{Comp} \\
G &\longmapsto \widehat{G}
\end{aligned}
$$

tal que $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ es adjunto.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
\widehat{G} \arrow[rr, "\widehat{f}"] \arrow[dr] & & N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & G/G_\lambda \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & N/N'_\lambda
\end{tikzcd}$$

Figure 5: Factorización

Demostración. Sean $T \in \text{Comp}$, $G \in \text{Filt}$ y $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{V}(G)$. Consideremos para ellos

$$\begin{array}{rcl} \psi : \text{Hom}(\mathcal{V}(G), T) & \longrightarrow & \text{Hom}(G, \mathcal{U}(T)) \\ g & \longmapsto & g \circ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi : \text{Hom}(G, \mathcal{U}(T)) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{V}(G), T) \\ h & \longmapsto & \widehat{h} \circ \alpha \end{array}$$

La correspondencia entre ellas es unideterminada, y la conmutatividad es evidente.

□

Ejemplo 6. Denotamos $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ a los enteros p-ádicos, completación del anillo $\mathbb{Z}$ con respecto a la norma p-ádica.

Proposición 1.7. *Para todo $a \in \mathbb{Z}_p$ existe una única sucesión (a_n) de elementos en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tal que*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

Ejercicio 1.4. *$\mathbb{Z}_p$ es dominio entero.*

Solución. Sean $a = (a_n),\ b = (b_n) \in \mathbb{Z}_p$, verifiquemos por inducción que si $a \cdot b = (0_n)$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Paso Base Si $a_0 b_0 = 0$ entonces $a_0 = 0$ o $b_0 = 0$ pues se trata de enteros.
Paso Inductivo Supongamos se verifica para el índice k que $a_k = 0$. Tenemos que $a_k \equiv a_{k+1} \pmod{p^k}$ implica $0 \equiv hp^k \pmod{p^k}$, a su vez es cierto también que $0 \equiv hp^{k-1} \pmod{p^k}$ pero $h \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, entonces necesariamente $h = 0 = a_{k+1}$.

Ejemplo 7. Denotamos $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}_p)$ al cuerpo de los números p-ádicos.

Ejemplo 8. La completación de $K[x]$ con la filtración I-ádica para $I = \langle x \rangle$ es el anillo de las series formales $K[[x]]$.

1.5 Propiedades y Resultados

En esta sección veremos caracterización y resultados importantes respecto a las completaciones que hemos hecho en las secciones previas, buscando más un potencial aplicativo, algo necesario llegados a este punto.

Definición 1.8 (Anillo Valuado)**.** Un anillo $R = D$ se dice valuado sii es dominio entero y para cada $x \neq 0 \in K = \mathrm{Quot}(R) \neq R$ tenemos que $x \in R$ o $x^{-1} \in R$.

Ejercicio 1.5. *Sea R un anillo valuado. Existe una función $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ que es valuación sobre K y verifica*

$$D = \{x \in K : v_I(x) \geq 0\}$$

Solución. Sea $I \subset D$ el ideal conformado por todos los elementos no invertibles de R. I es primo, consideremos para él, filtración y seminorma I-ádica en $\Gamma = \mathbb{Z}$ con $\epsilon = e$. Bajo estas condiciones tenemos

$$v_I(x) := \log \|x\| \quad \text{y} \quad v_I(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in D$$

Teorema 1.4 (Anillos de Valuación Discreta)**.** *Sea R un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *R es PID con un único ideal máximal no nulo.*
2. *R es PID y no es campo.*
3. *R es un anillo valuado y $v(K) \cong \mathbb{Z}$.*
4. *R es PID, noetheriano local con ideal maximal principal y no es campo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Inmediato, un campo solo tiene los ideales triviales. (2) $\Rightarrow$ (3) R PID implica R dominio de integridad y $R \neq K$, en virtud del ejercicio 1.5 existe la valuación más aún aquí $I = \langle \pi \rangle$ para algún $\pi \in R$ no invertible, luego $v(K) \cong \mathbb{Z}$. (3) $\Rightarrow$ (4) Sea $I \subset R$ ideal, consideremos su imágen por la valuación $v_I(I) = S \subset \mathbb{Z}$. S es subgrupo de $\mathbb{Z}$ pues si $n, -m \in S$ entonces existen $x, y \in K$ tales que $v(x) = n$ y $v(y) = -m$, ahora $xy \in I$ y $v(xy) = v(x) + v(y) = n - m \in S$. Esto implica $S = k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$. Por lo tanto, $v^{-1}(S) = I = \langle v^{-1}(k) \rangle$, es decir, R es PID.

En un argumento similar $v(I_k)$ lleva la cadena de idelaes en R en otra de $\mathbb{Z}$ que es noetheriano, por lo que existe $v(I_m)$ tal que $v(I_k) \subset v(I_m) \subset \mathbb{Z}$ para cada k, la cadena para. Por último, el ideal $I = \langle \pi \rangle$ compuesto de todos los elementos no invertibles de R es el maximal lo cual justifica el ser local y no campo. (4) $\Rightarrow$ (1) inmediato.

Ejemplo 9. Como vimos en la sección previa $\mathbb{Z}_p$ es dominio entero, por lo tanto, es también noetheriano.

Lema 1.2 (Krull)**.** *Sea R un anillo noetheriano local e $I \subset R$ entonces $\bigcap I^n = 0$.*

El Lema de Krull nos asegura buenas condiciones para trabajar en anillos de valuación discreta, también motiva y da pie al Lema de Hensel que es una extensión del método de Newton-Rhapson para aproximar raíces de polinomios a este tipo de anillos, agregando el encanto de que aquí converge siempre. Todo esto surge como ventaja de trabajar el límite proyectivo, tenemos congruencias en campos residuales que permite este importante y aplicativo resultado.

Teorema 1.5 (Hensel)**.** *Sea A un anillo noetheriano local completo con respecto a su ideal maximal m. Denotamos $K := A/m$ su campo de residuos. Para cada $f(x) \in A[x]$ mónico sea $\widehat{f}(x) \in K[x]$ su reducción módulo m. Si $\widehat{f}(x) = G(x)H(x)$ para G y H coprimos entonces existen únicos $g(x), h(x) \in A[x]$ tales que*

1. *g y h son mónicos*
2. *$\deg(g) = \deg(G)$ y $\deg(h) = \deg(H)$*
3. *$\widehat{g} = G$ y $\widehat{h} = H$*

Demostración. A completo sugiere $A := \varprojlim A/m^n$ para $n \in \mathbb{N}$, con ello en mente recordemos la inmersión de cocientes vista en la sección 1.2. En estos nuevos términos tenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\pi_n"'] \arrow[dr, "\pi_{n+1}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
A/m^n & & A/m^{n+1} \arrow[ll, "\varphi_n^{\,n+1}"]
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & A[x] \arrow[dl, "\widehat{\pi}_n"'] \arrow[dr, "\widehat{\pi}_{n+1}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
A/m^n[x] & & A/m^{n+1}[x] \arrow[ll, "\widehat{\varphi}_n^{\,n+1}"]
\end{tikzcd}
$$

Figure 6: Inmersión de cocientes y polinomios

Si $\widehat{\pi}_n(f) = \widehat{g}_n\widehat{h}_n \in A/m^n[x]$ entonces, puesto que $\widehat{\varphi}_n^{\,n+1} \circ \widehat{\pi}_{n+1} = \widehat{\pi}_n$ tenemos

$$
\begin{cases} \widehat{g}_{n+1} \equiv \widehat{g}_n \pmod{m^n} \\ \widehat{h}_{n+1} \equiv \widehat{h}_n \pmod{m^n} \end{cases} \tag{I}
$$

Sea $d_n = f - g_n h_n \in A/m^n[x]$. Por hipótesis tenemos G, H coprimos en $K[x]$ dominio euclidiano, luego

$$1 = \alpha_1 G + \beta_1 H \tag{II}$$

Probaremos por inducción cada $n \in \mathbb{N}$ lo planteado en se cumple I, también $\deg(\widehat{g}_n) = \deg(G)$ y $\deg(\widehat{h}_n) = \deg(H)$.

Paso Base. La proyección $\widehat{\pi}_1 : A[x] \to A/m[x]$ es sobreyectiva, luego H y G tienen preimagen $\widehat{g}_1, \widehat{h}_1$ que verifican las condiciones.

Paso Inductivo. Supongamos la iteración válida para cierto valor k, usando la misma notación manejada hasta ahora

$$\begin{cases} g_{k+1} = g_k + s \\ h_{k+1} = h_k + t \end{cases} \tag{III}$$

De II tenemos $1 \equiv \alpha_k g_k + \beta_k h_k \pmod{m^k}$, multiplicando esto por d_k nos queda

$$d_k \equiv (d_k\alpha_k) g_k + (d_k\beta_k) h_k \pmod{m^{k+1}} \tag{IV}$$

Sean ahora $g_{k+1}^{\circ} = g_k + d_k\beta_k$ y $h_{k+1}^{\circ} = \widehat{h}_k + d_k\alpha_k$, así definidos

$$\begin{cases} g_{k+1}^{\circ} \equiv g_k \pmod{m^k} \\ h_{k+1}^{\circ} \equiv h_k \pmod{m^k} \end{cases}$$

Luego

$$g_{k+1}^{\circ} h_{k+1}^{\circ} \equiv g_k h_k + d_k \equiv f \pmod{m^{k+1}} \tag{V}$$

Puesto que g_k, h_k son mónicos, al dividir $d_k\beta_k$ y $d_k\alpha_k$ por ellos tenemos

$$\begin{cases} d_k\beta_k = l_k g_k + s \\ d_k\alpha_k = m_k h_k + t \end{cases} \tag{VI}$$

Para esta escogencia de s, t y definiendo el siguiente paso como en III por la igualdades IV, V y VI tenemos

$$g_{k+1}h_{k+1} \equiv f \pmod{m^{k+1}} \Leftrightarrow f - g_k h_k \in \bigcap m^k = 0$$

Unicidad es inmediata, pues en dominio euclidiano los residuos son unideterminados.

$\square$

Ejemplo 10. La versión p-ádica del Lema de Hensel me dice que si $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ y $\widehat{f}(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ tiene una raíz simple α_1 entonces existe un único $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ que es raíz simple del polinomio $f(x)$. La condición de ser raíz simple se traduce en $d\widehat{f}(\alpha_1) \neq 0$. El algoritmo

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\widehat{f}(\alpha_n)}{d\widehat{f}(\alpha_n)}$$

Ejercicio 1.6. *Determinar la existencia de soluciones* $x^2 + 1 = 0$ *en* $\mathbb{Z}_5$ *y* $\mathbb{Z}_7$*.*

Solución. x^2+1 tiene solución en $\mathbb{Z}_p$ sii tienes solución en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Buscamos entonces primeramente soluciones en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
	$\bar{0} \longmapsto \bar{1}$
$\bar{0} \longmapsto \bar{1}$	$\bar{1} \longmapsto \bar{2}$
$\bar{1} \longmapsto \bar{2}$	$\bar{2} \longmapsto \bar{5}$
$\bar{2} \longmapsto \bar{0}$	$\bar{3} \longmapsto \bar{3}$
$\bar{3} \longmapsto \bar{0}$	$\bar{4} \longmapsto \bar{3}$
$\bar{4} \longmapsto \bar{2}$	$\bar{5} \longmapsto \bar{5}$
	$\bar{6} \longmapsto \bar{2}$

Por un lado, $\alpha_0^{(1)} = \bar{2}$ o $\alpha_0^{(2)} = \bar{3}$ son soluciones (mod 5) y por el otro no hay soluciones en $\mathbb{Z}_7$. Mejoremos la solución $\alpha_0^{(1)}$, $df(2) = 4$ por lo que podemos aplicar el algoritmo

Iteración 1 $\alpha_1^{(1)} = 2 - \frac{5}{4} \equiv 2 - 5 \cdot 19 \equiv -93 \equiv 7 \pmod{25}$

Iteración 2 $\alpha_2^{(1)} = 7 - \frac{50}{14} \equiv 7 - 50 \cdot 9 \equiv 57 \pmod{125}$

Hay solución $\beta \in \mathbb{Z}_5$ y $\beta \approx 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2$ con error $\sum_{n=3}^{\infty} a_n p^n$.

2 Interpretaciones Gráficas

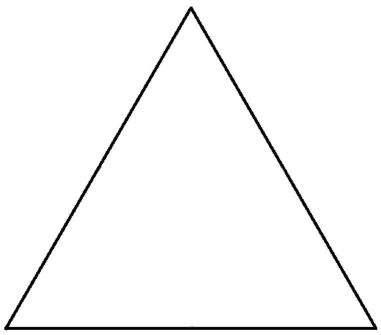
Al ser la completación un límite proyectivo, las congruencias inmersas en él nos permiten visualizar de alguna manera toda la teoría vista hasta ahora de un nivel de abstracción importante. Esto es posible gracias a que la topología (abiertos) está completamente determinada por los elementos de la filtración.

Existen varias formas de visualizar, sin embargo, acá nos concentraremos en la interpretación en fractales y los árboles p-ádicos.

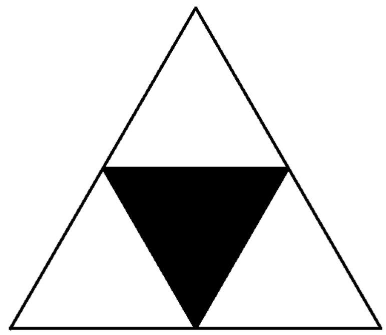
2.0.1 Fractales

Retomando nuestro ejemplo 1 de la filtración $\{3^n\mathbb{Z}\}$, teníamos que nuestros abiertos básicos eran de la forma $G_\lambda = 3^\lambda\mathbb{Z}$ y la filtración tenía la forma

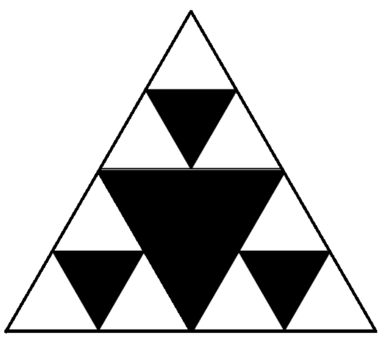
$$3^n\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq 3^2\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$



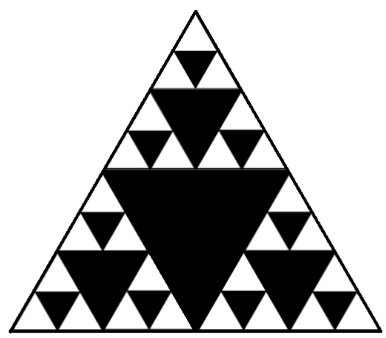
(a) $\mathbb{Z}$



(b) $3\mathbb{Z}$



(c) $3^2\mathbb{Z} = 9\mathbb{Z}$



(d) $3^3\mathbb{Z} = 27\mathbb{Z}$

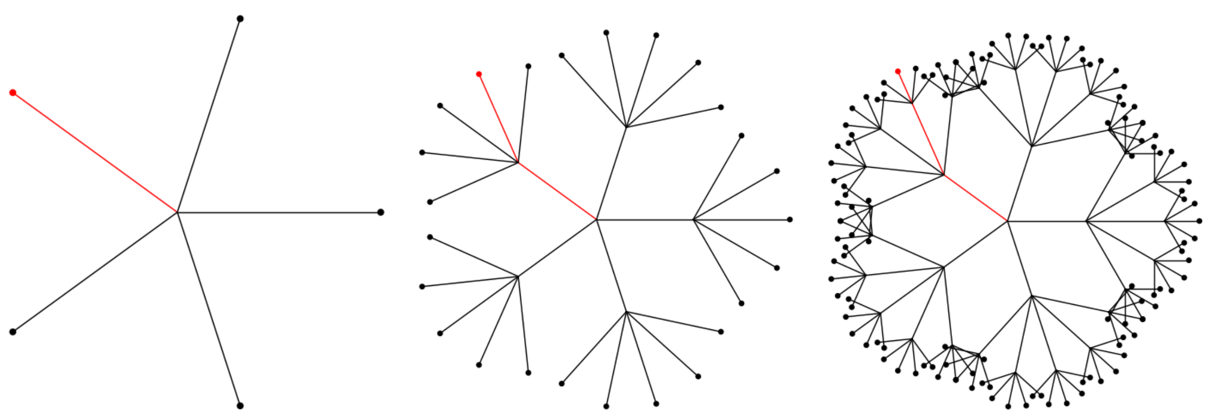
Figure 7: Abiertos $k + 3^n\mathbb{Z} \quad k \in \{0, 1, \cdots, 3^n - 1\}$

En la figura 7 los triángulos blancos representan los abiertos. Podemos notar perfectamente las contenciones y separabilidad de los abiertos que me hablan de ese refinamiento con el que se trabaja la convergencia. Al repetir este proceso al infinito tenemos que cada punto representa un entero 3-ádico.

2.0.2 Árboles p-ádicos

Este modelo consiste en, a partir de un punto inicial que vendría representando $\mathbb{Z}$ sacar exactamente p ramas, que serían las clases de equivalencia de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. A partir de ahí subdividimos cada rama en otras p ramas, y así sucesivamente. Este modelo es más provechoso pues nos permite una representación incluso más visual que la anterior de la aproximación de un número p-ádico.

Retomemos el ejercicio 1.6 donde aplicamos el Lema de Hensel en $\mathbb{Z}_5$ buscando la solución del polinomio x^2+1. Encontramos allí la aproximación $\beta = 2\cdot 5^0 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^2$. Los coeficientes son importantes pues me dicen la clase de equivalencia que toma mi número en cada nivel del árbol.



(a) $\beta_1 \in 5\mathbb{Z}$ (b) $\beta_2 \in 25\mathbb{Z}$ (c) $\beta_3 \in 125\mathbb{Z}$

Figure 8: Aproximaciones de $\beta \in \mathbb{Z}_5 : (\beta)^2 + 1 = 0\}$

En este modelo cada camino representa un número p-ádico. Las clases de equivalencia en el diagrama están ordenadas en sentido antihorario, para el paso base $5\mathbb{Z}$ la clase del cero $\bar{0}$ está representada por la rama cuyo ángulo $\theta = 0$.

3 Apéndice A

3.1 Esenciales Categóricos

Definición 3.1 (Categoría)**.** Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de los siguientes elementos:

- Una colección de *objetos* denotada $\mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}$
- Una colección de *morfismos* $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B_\alpha$ entre los objetos de la categoría, denotada $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}$
- Una ley de composición asociativa tal que, para toda $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, existe una flecha $f \circ g : A \longrightarrow C$
- Para todo $A \in \mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}$, existe un morfismo identidad $1_A : A \longrightarrow A$ tal que para $f : A \longrightarrow B$

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$$

Ejemplos de algunas categorías esenciales son:

Set Conjuntos, y las aplicaciones entre ellos.

Top Espacios topológicos con las aplicaciones continuas.

Ab La categoría de los grupos abelianos, con los homomorfismos de grupos, esta es subcategoría de **Grp**, grupos en general.

Definición 3.2 (Hom-Set)**.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Para $A, B \in \mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}$, denotamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ a la colección de flechas de $A \longrightarrow B$ en la categoría $\mathscr{C}$.

Definición 3.3 (Funtor)**.** Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un funtor es un mapeo $F; \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que:

i. $\forall C \in \mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}$, $F(C) \in \mathrm{Ob}_{\mathscr{D}}$

ii. $\forall f : A \longrightarrow B \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}$, $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}$

iii. $\forall A \in \mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$

iv. $\forall f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}$, $F(g \circ f) : F(g) \circ F(f)$

Definición 3.4 (Categoría Opuesta)**.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría, su categoría opuesta o categoría dual $\mathscr{C}^{op}$ es ella misma pero con las flechas invertidas.

$$\bar{f} : B \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}^{op}} \Leftrightarrow \exists f : A \longrightarrow B \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}$$

Esta categoría dual trabaja con las mismas identidades y ley de composición de la original.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "h"'] & & F(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "F(h)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(C) \arrow[d, "G(h)"] \\
D & \rightsquigarrow & F(D) \arrow[r, "\theta_D"'] & G(D)
\end{tikzcd}
$$

Definición 3.5 (Funtor covariante y contravariante)**.** Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtor. F se dice covariante si respeta la dirección de las flechas, es decir, para $f : A \longrightarrow B$, $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$. Por otro lado, F es contravariante si $F : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$ es covariante.

Ejemplo 11 (Funtores Hom-Set). El mapeo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, -) : \mathscr{C} \longrightarrow$ **Sets** define un funtor covariante de la siguiente manera

$$
\begin{cases}
\qquad\quad A & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \\
f : A \longrightarrow B & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)
\end{cases}
$$

Análogamente, se define $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, Y) : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow$ **Sets** contravariante

$$
\begin{cases}
\qquad\quad A & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, Y) \\
g : A \longrightarrow B & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g, Y) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, Y)
\end{cases}
$$

Definición 3.6 (Transformación Natural)**.** Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorías, y $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtores. Una transformación natural $\theta : F \longrightarrow G$ consiste de una colección de morfismos en $\mathscr{D}$ ($\theta_C : F(C) \longrightarrow G(C)$) tales que, para todos $C,\ D \in \mathscr{C}$ *e* $h : C \longrightarrow D$ el siguiente diagrama conmuta

Denotamos $\mathrm{Nat}(F, G)$ a la colección de todas las transformaciones naturales entre F y G.

3.2 Límite Funtorial y Funtores Adjuntos

Definición 3.7 (Límite Funtorial)**.** Sea I una categoría indexada y $F : I \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor. El límite de F es una dupla $(L, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ también llamada cono universal tal que

i. $L \in \mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & L \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}
$$

Figure 9: Cono universal

ii. $\varphi_i : L \longrightarrow F(i)$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que si $f : i \longrightarrow j \in \mathrm{Mor}_I$ entonces el diagrama en la figura 9 conmuta.

iii. Si existe otro cono $(M, \{\psi_i\}_{i \in I})$ que verifica i y ii entonces existe un morfismo único $h : M \longrightarrow L$ tal que $\psi_i = h \circ \varphi_i$.

Definición 3.8 (Funtor adjunto)**.** Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorías, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores. (F, G) es adjunto $F \dashv G$ si existe una biyección natural entre los morfismos

$$\mathrm{Hom}(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}(C, G(D))$$

Para cada $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$.

Teorema 3.1. *Si (F, G) es adjunto, entonces F preserva límites y G preserva colímites.*

References

[1] Michael Atiyah. *Introduction to commutative algebra.* CRC Press, 2018.

[2] Antonio J Engler and Alexander Prestel. *Valued fields.* Springer Science & Business Media, 2005.

[3] Andrea Ferretti. *Commutative Algebra.* American Mathematical Society, 2023.

[4] Svetlana Katok. *p-adic Analysis Compared with Real*, volume 37. American Mathematical Soc., 2007.

[5] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] Alain M Robert. *A course in p-adic analysis*, volume 198. Springer Science & Business Media, 2013.